Choquet積分のVitali型収束定理 (関数空間の構造とその周辺)

河邊, 淳

数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 184-190

Choquet 積分の Vitali 型収束定理

信州大学工学部　河邊　淳
Jun Kawabe
Faculty of Engineering, Shinshu University

1　はじめに

抽象 Lebesgue 積分の収束に関する Vitali の定理によれば，有限測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上の可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様 μ-可積分で，f_n が可測関数 f に μ-測度収束すれば，f は μ-可積分で，

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0, \qquad \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$$

が成り立つ．この結果は Lebesgue 積分論における最深の収束定理である．実際，他の重要な積分収束定理，例えば，有界収束定理や優収束定理は，この Vitali の収束定理から導かれる [12].

近年，人間が行う評価や意思決定に関わる諸問題を取り扱うには，加法性を仮定しない測度である“非加法的測度”と，その積算概念としての“非線形積分”が有効であることが認識されてきた [3, 9, 16, 18, 19]．非線形積分は幾つか提案されているが，その中でも Choquet 積分 [1] は，非加法的測度が σ-加法的なときは抽象 Lebesgue 積分と一致することから，理論と応用の両面で特に重要である．

この講演では，Choquet 積分とその対称／反対称拡大に対して Vitali 型の収束定理が成り立つことと，その定理から Choquet 積分の有界収束定理や優収束定理が演繹されることを報告する．従前の研究結果の紹介や定理の証明を含むより詳細な内容については [8] を見よ．また，非加法的測度や非線形積分の数学的な展開に焦点を当てた日本語による解説は [5] が詳しい．

2　記号と準備

X は空でない集合，$\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合体とする．関数 $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ は，任意の $t \in [-\infty, \infty]$ に対して，$\{f \geq t\} := \{x \in X\colon f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}$，$\{f > t\} := \{x \in X\colon f(x) > t\} \in \mathcal{A}$ のとき **$\mathcal{A}$-可測**といい，その全体を $\mathcal{F}(X)$ で表す．任意の定数関数や任意の集合 $A \in \mathcal{A}$ の定義関数 χ_A は $\mathcal{A}$-可測である．また，f と g が $\mathcal{A}$-可測，c が実数ならば，$f^+ := f \vee 0$，$f^- := (-f) \vee 0$，$|f| := f \vee (-f)$，cf，$f + c$，$(f - c)^+$，

$f \vee g$，$f \wedge g$ はすべて $\mathcal{A}$-可測となる．以下では，$\mathcal{F}_r(X) := \{f \in \mathcal{F}(X)\colon f$ は実数値$\}$，$\mathcal{F}^+(X) := \{f \in \mathcal{F}(X)\colon f \geq 0\}$，$\mathcal{F}_r^+(X) := \{f \in \mathcal{F}_r(X)\colon f \geq 0\}$ とおく．

定義 1. [2,10,18]　集合関数 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ は次の 2 つの条件

(i) $\mu(\emptyset) = 0$　(下方有界性)

(ii) $A, B \in \mathcal{A}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$　(単調増加性)

を満たすとき**非加法的測度**といい，その全体を $\mathcal{M}(X)$ で表す．特に，$\mu(X) < \infty$ のとき μ は**有限**といい，$\mathcal{M}_b(X) := \{\mu \in \mathcal{M}(X)\colon \mu(X) < \infty\}$ とおく．μ が有限なとき，その**双対測度** $\bar{\mu}$ を

$$\bar{\mu}(A) := \mu(X) - \mu(A^c), \quad A \in \mathcal{A}$$

で定義する．ただし，A^c は集合 A の補集合を表す．

通常の測度論の結果を非加法的測度の枠組みで定式化する際には，非加法的測度に σ-加法性に代わる何らかの "擬加法的" 性質を課す必要がある．次に紹介する自己連続性はそのような擬加法的性質の中でも特に重要である．

定義 2. [17]　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．任意の $A \in \mathcal{A}$ と任意の $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \cup B_n) \to \mu(A)$ かつ $\mu(A \setminus B_n) \to \mu(A)$ のとき，μ は**自己連続**という．

例 1.　次の非加法的測度は自己連続である．

(1) **劣加法的**，すなわち，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$A \cap B = \emptyset$ ならば $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ を満たす非加法的測度

(2) $\inf\{\mu(A)\colon A \in \mathcal{A}, A \neq \emptyset\} > 0$ を満たす非加法的測度

(3) **歪測度**，すなわち，各 $A \in \mathcal{A}$ に対して，$\mu(A) = \varphi(m(A))$ で定義された非加法的測度．ただし，m は $(X, \mathcal{A})$ 上の有限加法的測度，$\varphi\colon [0, m(X)] \to [0,\infty]$ は $\varphi(0) = 0$ を満たす連続な単調増加関数で，原点の近傍で狭義単調増加．

このように自己連続な非加法的測度の例は数多くあるが，次の例が示すように，非加法的測度 μ が自己連続であっても，その双対測度 $\bar{\mu}$ は必ずしも自己連続とは限らない．

例 2.　(1) $X := [0,1]$，2^X は X のすべての部分集合からなる集合族とする．非加法的測度 $\mu\colon 2^X \to [0,1]$ を

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{if } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{if } A = \emptyset \end{cases}$$

で定義すると，μ は劣加法的，それゆえ自己連続．しかし，その双対測度 $\bar{\mu}\colon 2^X \to [0,1]$ は

$$\bar{\mu}(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } A = X, \\ 0 & \text{if } A \neq X \end{cases}$$

となり，自己連続でない．

(2) $X := [0,1]$，$\mathcal{A}$ は X の Lebesgue 可測集合からなる σ-集合体，λ は $(X, \mathcal{A})$ 上の Lebesgue 測度とする．非加法的測度 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,2]$ を

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 + \lambda(A) & \text{if } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{if } A = \emptyset \end{cases}$$

で定義すると，μ は劣加法的，それゆえ自己連続．しかし，その双対測度 $\bar{\mu}\colon \mathcal{A} \to [0,2]$ は

$$\bar{\mu}(A) = \begin{cases} 2 & \text{if } A = X, \\ \lambda(A) & \text{if } A \neq X \end{cases}$$

となり，自己連続でない．

3 Choquet 積分

非加法的測度による積算概念としては，次に紹介する Choquet 積分の他に，Šipoš 積分 [15]，Sugeno 積分 [11, 16]，Shilkret 積分 [14, 20] などがよく用いられる．今回はそれらの中でも，数学的取り扱いが比較的容易で，非加法的測度が σ-加法的なときは通常の抽象 Lebesgue 積分と一致する Choquet 積分について考察する．

定義 3. [1] $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ とする．f の μ に関する **Choquet 積分**を

$$\mathrm{Ch}(\mu, f) := \int_0^\infty \mu(\{f > t\})dt$$

で定義する．$f \in \mathcal{F}(X)$ で $\mathrm{Ch}(\mu, |f|) < \infty$ のとき，f は **(絶対) $\boldsymbol{\mu}$-可積分**という．

定義 4. [13] f の μ に関する**対称 Choquet 積分**，**反対称 Choquet 積分**を，それぞれ

$$\mathrm{Ch}^s(\mu, f) := \mathrm{Ch}(\mu, f^+) - \mathrm{Ch}(\mu, f^-), \quad (\mu, f) \in \mathcal{D}^s$$

$$\mathrm{Ch}^a(\mu, f) := \mathrm{Ch}(\mu, f^+) - \mathrm{Ch}(\bar{\mu}, f^-), \quad (\mu, f) \in \mathcal{D}^a$$

で定義する．ただし，

$$\mathcal{D}^s := \left\{(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}(X)\colon \mathrm{Ch}(\mu, f^+) < \infty \text{ または } \mathrm{Ch}(\mu, f^-) < \infty\right\}$$

$$\mathcal{D}^a := \left\{(\mu, f) \in \mathcal{M}_b(X) \times \mathcal{F}(X)\colon \mathrm{Ch}(\mu, f^+) < \infty \text{ または } \mathrm{Ch}(\bar{\mu}, f^-) < \infty\right\}$$

とする．$(\mu, f) \in \mathcal{D}^s$ で $|\mathrm{Ch}^s(\mu, f)| < \infty$ のとき，f は**対称 $\boldsymbol{\mu}$-可積分**といい，$(\mu, f) \in \mathcal{D}^a$ で $|\mathrm{Ch}^a(\mu, f)| < \infty$ のとき，f は**反対称 $\boldsymbol{\mu}$-可積分**という．

定義 4 より，非加法的測度 μ が与えられたとき，関数 f に対して，μ-可積分性，$\bar{\mu}$-可積分性，対称 μ-可積分性，対称 $\bar{\mu}$-可積分性，反対称 μ-可積分性，反対称 $\bar{\mu}$-可積分性の計 6

つの可積分性が定義できる．しかし，次の命題が示すように，これら可積分性の間に成り立つ相互関係はあまりにも貧弱である．

命題 1. $f \in \mathcal{F}(X)$，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．

(1) f は μ-可積分 $\Rightarrow$ f^+ と f^- は μ-可積分 $\Rightarrow$ f は対称 μ-可積分．

(2) f^+ と f^- が μ-可積分であっても，f が μ-可積分とは限らない．

(3) f の μ-可積分性と f の反対称 μ-可積分性は互いに独立な概念である．

(4) f の μ-可積分性 (対称 μ-可積分性，反対称 μ-可積分性) と f の $\bar{\mu}$-可積分性 (対称 $\bar{\mu}$-可積分性，反対称 $\bar{\mu}$-可積分性) は互いに独立な概念である．

(5) f は μ-可積分かつ $\bar{\mu}$-可積分 $\Leftrightarrow$ f^+ と f^- は μ-可積分かつ $\bar{\mu}$-可積分 $\Leftrightarrow$ f は対称 μ-可積分，対称 $\bar{\mu}$-可積分，反対称 μ-可積分かつ反対称 $\bar{\mu}$-可積分．

(6) μ は ***k*-劣加法的** ($k \geq 1$)，すなわち，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$A \cap B = \emptyset$ ならば $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + k\mu(B)$ とする．このとき，$\bar{\mu} \leq k\mu$ となるので，f は μ-可積分 (対称 μ-可積分，反対称 μ-可積分) $\Rightarrow$ f は $\bar{\mu}$-可積分 (対称 $\bar{\mu}$-可積分，反対称 $\bar{\mu}$-可積分)．

4 一様可積分性

Lebesgue 積分の場合と全く同様にして，Choquet 積分に対しても関数族の一様可積分性，一様積分有界性，一様絶対連続性が定式化できる．

定義 5. $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(X)$ は空でないとする．

(1) $\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Ch}(\mu, |f|) < \infty$ のとき，$\mathcal{F}$ は**一様 μ-積分有界**という．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$\mu(A) < \delta$ ならば $\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Ch}(\mu, \chi_A |f|) < \varepsilon$ のとき，$\mathcal{F}$ は**一様 μ-絶対連続**という．

(3) $\lim_{c \to \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Ch}(\mu, \chi_{\{|f| > c\}} |f|) = 0$ のとき，$\mathcal{F}$ は**一様 μ-可積分**という．

次の命題の証明も Lebesgue 積分の場合とほぼ同様である．

命題 2. $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$，$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(X)$ は空でないとする．このとき，$\mathcal{F}$ が一様 μ-可積分であるための必要十分条件は，$\mathcal{F}$ が一様 μ-積分有界かつ一様 μ-絶対連続である．

次の命題は一様可積分な関数族の例を与えると同時に，Vitali 型収束定理から有界収束定理や優収束定理を導く際の橋渡しの役目も担っている．

命題 3. $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(X)$ は空でないとする．

(1) $\mathcal{F}$ が**一様 μ-本質的対称有界**，すなわち，定数 $c > 0$ が存在して，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対

して，$\mu(\{f \geq c\}) = \mu(\{f \leq -c\}) = 0$ ならば，$\mathcal{F}^+$ と $\mathcal{F}^-$ は一様 μ-可積分．

(2) μ は有限で，$\mathcal{F}$ が**一様 μ-本質的有界**，すなわち，定数 $c > 0$ が存在して，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，$\mu(\{f \geq c\}) = 0$ かつ $\mu(\{f \geq -c\}) = \mu(X)$ ならば，$\mathcal{F}^+$ は一様 μ-可積分．一方，$\mathcal{F}^-$ は一様 $\bar{\mu}$-可積分．

(3) μ-可積分な $g \in \mathcal{F}^+(X)$ が存在して，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $|f| \leq g$ とする．この関数 g を $\mathcal{F}$ の**優関数**という．このとき，$\mathcal{F}$ は一様 μ-可積分．

(4) ある $p > 1$ に対して $\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Ch}(\mu, |f|^p) < \infty$ ならば，$\mathcal{F}$ は一様 μ-可積分．

注意 1. (1) μ が有限で，関数族 $\mathcal{F}$ が**一様有界**，すなわち，定数 $c > 0$ が存在して，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $|f| \leq c$ ならば，$\mathcal{F}$ は一様 μ-本質的有界かつ一様 μ-本質的対称有界である．

(2) 関数族の一様本質的有界性と一様本質的対称有界性は互いに独立な概念である．

(3) 命題 3 の (1) と (2) は，次の節で紹介する Vitali 型収束定理から有界収束定理を導く際に，また，(3) は優収束定理を導く際に利用される．

5 Vitali 型収束定理

この節では紙面の都合上，非負関数族に対する Vitali 型収束定理だけを紹介する．以下では $(X, \mathcal{A})$ は可測空間とする．

$\mu \in \mathcal{M}(X)$，$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_r(X)$，$f \in \mathcal{F}_r(X)$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \to 0$$

のとき，$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に **μ-測度収束**するといい，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とかく．明らかに，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，$|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$，$f_n^+ \xrightarrow{\mu} f^+$，$f_n^- \xrightarrow{\mu} f^-$ である．

次の定理は Lebesgue 積分に対する Vitali の定理の非加法化/非線形化になっている．

定理 1. $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ とする．次の 3 つの条件は同値:

(i) μ は自己連続．

(ii) 任意の $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_r^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_r^+(X)$ に対して，$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が一様 μ-可積分で $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，f も μ-可積分で，$\mathrm{Ch}(\mu, f_n) \to \mathrm{Ch}(\mu, f)$．

(iii) 任意の $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_r^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_r^+(X)$ に対して，$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が一様 $\bar{\mu}$-可積分で $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，f も $\bar{\mu}$-可積分で，$\mathrm{Ch}(\bar{\mu}, f_n) \to \mathrm{Ch}(\bar{\mu}, f)$．

注意 2. (1) 定理 1 の (i)⇔(iii) では，双対測度 $\bar{\mu}$ ではなく，元の測度 μ の自己連続性と μ-測度収束性を仮定している点に注意せよ．μ が自己連続ならば $f_n \xrightarrow{\mu} f$ から $f_n \xrightarrow{\bar{\mu}} f$ は従うが，例 2 より $\bar{\mu}$ は自己連続とは限らないので，(i)⇔(iii) は (i)⇔(ii) からの自明な帰結ではない．

(2) μ が k-劣加法的 $(k \geq 1)$，特に劣加法的ならば，$\bar{\mu} \leq k\mu$ となるので，一様 μ-可積分性から一様 $\bar{\mu}$-可積分性が導ける．

(3) 定理 1 と同様の主張が，対称 Choquet 積分や反対称 Choquet 積分に対しても成り立つ．

(4) 定理 1 において μ はさらに**強順序連続**，すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ と任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$A_n \downarrow A$ で $\mu(A) = 0$ ならば $\mu(A_n) \downarrow 0$ であるとする．このとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に μ-概収束すれば μ-測度収束するので，Vitali 型収束定理は概収束する関数列に対しても成り立つ．

6　今後の課題

命題 3 より，一様有界な関数族や優関数をもつ関数族は Choquet 積分に関して一様可積分となるので，Choquet 積分，対称 Choquet 積分，反対称 Choquet 積分の有界収束定理や優収束定理は，定理 1 とその対称 Choque 積分，反対称 Choquet 積分への拡張命題から直ちに得られる．

非加法的測度論では，今回取り扱った Choquet 積分の他に，Šipoš 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分などの非線形積分がよく用いられる．それゆえ，これら非線形積分に対しても同様の定式化が可能かどうかを考察することは非常に重要である．また，[4,6,7] などの研究指針に基づき，最終的には，非線形積分の種類によらない汎用的な Vitali 型収束定理を確立することが今後の課題である．

参考文献

[1] G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **5** (1953–54), 131–295.

[2] D. Denneberg, *Non-Additive Measure and Integral*, second edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[3] M. Grabisch, T. Murofushi and M. Sugeno (eds.), *Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[4] J. Kawabe, *The bounded convergence in measure theorem for nonlinear integral functionals*, Fuzzy Sets Syst., **271** (2015), 31–42.

[5] 河邊 淳, 非加法的測度と非線形積分—理論的展開に焦点を当てて—, 数学, 第 68 巻, 日本数学会編集, 岩波書店, 2016, 266–292.

[6] J. Kawabe, *A unified approach to the monotone convergence theorem for nonlinear integrals*, Fuzzy Sets Syst., **304** (2016), 1–19.

[7] J. Kawabe, *The monotone convergence theorems for nonlinear integrals on a topo-*

logical space, Linear and Nonlinear Analysis, **2** (2016), 281–300.

[8] J. Kawabe, *The Vitali type theorem for the Choquet integral*, submitted for publication.

[9] K. G. Nishimura and H. Ozaki, *Search and Knightian uncertainty*, J. Econom. Theory, **119** (2004), 299–333.

[10] E. Pap, *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1995.

[11] D. Ralescu and G. Adams, *The fuzzy integral*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 562–570.

[12] M. M. Rao, *Measure Theory and Integration*, second edition, Marcel Dekker, New York, 2004.

[13] D. Schmeidler, *Integral representation without additivity*, Proc. Amer. Math. Soc., **97** (1986), 255–261.

[14] N. Shilkret, *Maxitive measure and integration*, Indag. Math., **33** (1971), 109–116.

[15] J. Šipoš, *Integral with respect to a pre-measure*, Math. Slovaca, **29** (1979), 141–155.

[16] M. Sugeno, *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*, Ph.D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1974.

[17] Z. Wang, *The autocontinuity of set function and the fuzzy integral*, J. Math. Anal. Appl., **99** (1984), 195–218.

[18] Z. Wang and G. J. Klir, *Generalized Measure Theory*, Springer, New York, 2009.

[19] Z. Wang, R. Yang and K.-S. Leung, *Nonlinear Integrals and their Applications in Data Mining*, World Scientific, Singapore, 2010.

[20] R. H. Zhao, *(N) fuzzy ingetral* (in Chinese), J. Math. Res. Exposition, **1** (1981), 55–72.

Jun Kawabe
Faculty of Engineering
Shinshu University
4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553
JAPAN
E-mail address: jkawabe@shinshu-u.ac.jp